अध्याय 2

बहुपद

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- बहुपद का अर्थ
- बहुपद की घात
- गुणांक
- एकपदी, द्विपद, इत्यादि
- अचर, रैखिक, द्विघात बहुपद, इत्यादि
- चर के दिए हुए मान के लिए बहुपद का मान
- बहुपद के शून्यक
- शेषफल प्रमेय
- गुणनखंड प्रमेय
- मध्यपद को विभक्त कर एक द्विघात बहुपद का गुणनखंडन

  गुणनखंड प्रमेय के प्रयोग द्वारा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड बीजीय सर्वसमिकाएँ :

  बीजीय सर्वसमिकाएँ –

  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

© NCERT not to be republished

$x^3 + y^3 = (x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि सभी x के लिए, $x^2 + kx + 6 = (x + 2)\ (x + 3)$ है, तो k का मान है

(A) 1 (B) –1 (C) 5 (D) 3

हल : उत्तर (C)

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. निम्नलिखित में से कौन एक बहुपद है?

(A) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x^2}$ (B) $\sqrt{2x} - 1$

(C) $x^2 + \dfrac{3x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ (D) $\dfrac{x-1}{x+1}$

2. $\sqrt{2}$ निम्नलिखित घात का एक बहुपद है :

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) $\dfrac{1}{2}$

3. बहुपद $4x^4 + 0x^3 + 0x^5 + 5x + 7$ की घात है :

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 7

4. शून्य बहुपद की घात है :

(A) 0 (B) 1 (C) कोई भी प्राकृत संख्या

(D) परिभाषित नहीं

5. यदि $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ है, तो $p\left(2\sqrt{2}\right)$ बराबर है :

(A) 0 (B) 1 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{2} + 1$

6. जब $x = -1$ है, तो बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान है :

(A) – 6 (B) 6 (C) 2 (D) –2

© NCERT not to be republished

7. यदि $p(x) = x + 3$ है, तो $p(x) + p(-x)$ बराबर है :

(A) 3 (B) $2x$ (C) 0 (D) 6

8. शून्य बहुपद का शून्यक है :

(A) 0 (B) 1

(C) कोई वास्तविक संख्या (D) परिभाषित नहीं

9. बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्यक है :

(A) $-\frac{2}{5}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{2}$

10. बहुपद $2x^2 + 7x - 4$ के शून्यकों में से एक है :

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2

11. यदि $x^{51} + 51$ को $x + 1$ से भाग दिया जाए, तो शेषफल है :

(A) 0 (B) 1 (C) 490 (D) 50

12. यदि $x + 1$ बहुपद $2x^2 + kx$ का एक गुणनखंड हो, तो k का मान है :

(A) -3 (B) 4 (C) 2 (D) -2

13. $x + 1$ निम्नलिखित बहुपद का एक गुणनखंड है :

(A) $x^3 + x^2 - x + 1$ (B) $x^3 + x^2 + x + 1$

(C) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ (D) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

14. $(25x^2 - 1) + (1 + 5x)^2$ के गुणनखंडों में से एक है :

(A) $5 + x$ (B) $5 - x$ (C) $5x - 1$ (D) $10x$

15. $249^2 - 248^2$ का मान है :

(A) 1^2 (B) 477 (C) 487 (D) 497

16. $4x^2 + 8x + 3$ का गुणनखंडन है :

(A) $(x + 1)(x + 3)$ (B) $(2x + 1)(2x + 3)$

(C) $(2x + 2)(2x + 5)$ (D) $(2x - 1)(2x - 3)$

17. निम्नलिखित में से कौन $(x + y)^3 - (x^3 + y^3)$ का एक गुणनखंड है?

(A) $x^2 + y^2 + 2xy$ (B) $x^2 + y^2 - xy$ (C) xy^2 (D) $3xy$

18. $(x + 3)^3$ के प्रसार में x का गुणांक है :

(A) 1 (B) 9 (C) 18 (D) 27

© NCERT not to be republished

19. यदि $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-1$ $(x, y \neq 0)$ है, तो $x^3 - y^3$ का मान है :

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

20. यदि $49x^2 - b = \left(7x+\frac{1}{2}\right)\left(7x-\frac{1}{2}\right)$ है, तो b का मान है :

(A) 0 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

21. यदि $a + b + c = 0$ है, तो $a^3 + b^3 + c^3$ बराबर है :

(A) 0 (B) abc (C) $3abc$ (D) $2abc$

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**, लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}x^{\frac{1}{2}}+1$ एक बहुपद है

(ii) $\frac{6\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$, $x \neq 0$ एक बहुपद है।

हल :

(i) असत्य, क्योंकि चर का घातांक एक पूर्ण संख्या नहीं है।

(ii) सत्य, क्योंकि $\frac{6\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=6+x$, जो एक बहुपद है।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित में से कौन से व्यंजक बहुपद हैं? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) 8 (ii) $\sqrt{3}x^2-2x$ (iii) $1-\sqrt{5x}$

(iv) $\frac{1}{5x^{-2}}+5x+7$ (v) $\frac{(x-2)(x-4)}{x}$ (vi) $\frac{1}{x+1}$

(vii) $\frac{1}{7}a^3 - \frac{2}{\sqrt{3}}a^2 + 4a - 7$ (viii) $\frac{1}{2x}$

2. क्या निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**, लिखिए। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

(i) एक द्विपद के अधिकतम दो पद हो सकते हैं

(ii) प्रत्येक बहुपद एक द्विपद है।

(iii) एक द्विपद की घात 5 हो सकती है।

(iv) एक बहुपद का शून्यक सदैव 0 होता है।

(v) एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक नहीं हो सकते हैं।

(vi) घात 5 वाले दो बहुपदों के योग की घात सदैव 5 होती है।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 :

(i) जाँच कीजिए कि $p(x)$, $g(x)$ का एक गुणज है या नहीं, जहाँ

$p(x) = x^3 - x + 1$ और $g(x) = 2 - 3x$ है।

(ii) जाँच कीजिए कि $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं, जहाँ

$p(x) = 8x^3 - 6x^2 - 4x + 3$ और $g(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{4}$ है।

हल :

(i) $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणज होगा, यदि $g(x)$, $p(x)$ को विभाजित करता है।

अब, $g(x) = 2 - 3x = 0$ से $x = \frac{2}{3}$ प्राप्त होता है।

शेषफल $= p\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right) + 1$

$= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{17}{27}$

क्योंकि शेषफल $\neq 0$ है, इसलिए $p(x)$, $g(x)$ का गुणज नहीं है।

(ii) $g(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{4} = 0$ से $x = \frac{3}{4}$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

$g(x), p(x)$ का एक गुणनखंड होगा, यदि $p\left(\frac{3}{4}\right)=0$ (गुणनखंड प्रमेय)

अब, $$p\left(\frac{3}{4}\right)=8\left(\frac{3}{4}\right)^3-6\left(\frac{3}{4}\right)^2-4\left(\frac{3}{4}\right)+3$$

$$= 8\times\frac{27}{64}-6\times\frac{9}{16}-3+3 = 0$$

क्योंकि, $p\left(\frac{3}{4}\right)=0$ है, अतः $g(x), p(x)$ का एक गुणनखंड है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : a का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x-a$ बहुपद $x^3-ax^2+2x+a-1$ का एक गुणनखंड है।

हल : मान लीजिए कि $p(x) = x^3 - ax^2 + 2x + a - 1$

क्योंकि $x - a$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है, इसलिए $p(a) = 0$ है।

अर्थात्, $a^3 - a(a)^2 + 2a + a - 1 = 0$

या $a^3 - a^3 + 2a + a - 1 = 0$

या $3a = 1$

अतः, $a = \frac{1}{3}$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : (i) घनों का वास्तविक रूप से परिकलन किए बिना $48^3 - 30^3 - 18^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) घनों को ज्ञात किए बिना $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ के गुणनखंडन कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ है।

इसलिए, यदि $x + y + z = 0$ हो, तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ अर्थात् $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(i) हमें $48^3 - 30^3 - 18^3 = 48^3 + (-30)^3 + (-18)^3$ का मान ज्ञात करना है।

यहाँ, $48 + (-30) + (-18) = 0$

अतः, $48^3 + (-30)^3 + (-18)^3 = 3 \times 48 \times (-30) \times (-18) = 77{,}760$

(ii) यहाँ, $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ है।

अतः, $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नलिखित बहुपदों को एक पद वाले, दो पद वाले, इत्यादि बहुपदों में वर्गीकृत कीजिए :

(i) $x^2 + x + 1$ (ii) $y^3 - 5y$

(iii) $xy + yz + zx$ (iv) $x^2 - 2xy + y^2 + 1$

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक की घात निर्धारित कीजिए :

(i) $2x - 1$ (ii) -10

(iii) $x^3 - 9x + 3x^5$ (iv) $y^3 (1 - y^4)$

3. बहुपद $\frac{x^3+2x+1}{5} - \frac{7}{2}x^2 - x^6$ के लिए, लिखिए :

(i) बहुपद की घात

(ii) x^3 का गुणांक

(iii) x^6 का गुणांक

(iv) अचर पद

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए :

(i) $\frac{\pi}{6}x + x^2 - 1$ (ii) $3x - 5$

(iii) $(x - 1)(3x - 4)$ (iv) $(2x - 5)(2x^2 - 3x + 1)$

5. निम्नलिखित को एक अचर, रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपदों के रूप में वर्गीकृत कीजिए :

(i) $2 - x^2 + x^3$ (ii) $3x^3$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) $4 - 5y^2$

(v) 3 (vi) $2 + x$ (vii) $y^3 - y$ (viii) $1 + x + x^2$

(ix) t^2 (x) $\sqrt{2}x - 1$

6. एक ऐसे बहुपद का उदाहरण दीजिए, जो :

(i) घात 1 का एक एकपदी है।

(ii) घात 20 का एक द्विपद है।

(iii) घात 2 का एक त्रिपद है।

7. बहुपद $3x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ के मान ज्ञात कीजिए, जब $x = 3$ हो तथा $x = -3$ हो।

8. यदि $p(x) = x^2 - 4x + 3$ है, तो $p(2) - p(-1) + p\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान निकालिए।

© NCERT not to be republished

9. निम्नलिखित बहुपदों के लिए, $p(0), p(1)$ और $p(-2)$ ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = 10x - 4x^2 - 3$ (ii) $p(y) = (y + 2)(y - 2)$

10. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** है या **असत्य** :

(i) -3 बहुपद $x - 3$ का एक शून्यक है।

(ii) $-\frac{1}{3}$ बहुपद $3x + 1$ का एक शून्यक है।

(iii) $\frac{-4}{5}$ बहुपद $4 - 5y$ का एक शून्यक है।

(iv) 0 और 2 बहुपद $t^2 - 2t$ के शून्यक हैं।

(v) -3 बहुपद $y^2 + y - 6$ का एक शून्यक है।

11. निम्नलिखित में से प्रत्येक में, बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x - 4$ (ii) $g(x) = 3 - 6x$

(iii) $q(x) = 2x - 7$ (iv) $h(y) = 2y$

12. बहुपद $p(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

13. वास्तविक विभाजन द्वारा भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए जब पहले बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग दिया जाता है : $x^4 + 1; x - 1$

14. शेषफल प्रमेय से शेषफल ज्ञात कीजिए, जब $p(x)$ को $g(x)$ से भाग दिया जाता है, जहाँ

(i) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1,\quad g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 50,\quad g(x) = x - 3$

(iii) $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3,\quad g(x) = 2x - 1$

(iv) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 4,\quad g(x) = 1 - \frac{3}{2}x$

15. जाँच कीजिए कि $p(x), g(x)$ का एक गुणज है या नहीं :

(i) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3,\quad g(x) = x - 2$

(ii) $p(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x + 5,\quad g(x) = 2x + 1$

16. दर्शाइए कि :

(i) $x + 3$ बहुपद $69 + 11x - x^2 + x^3$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $2x - 3$ बहुपद $x + 2x^3 - 9x^2 + 12$ का एक गुणनखंड है।

17. निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित में से किस बहुपद का $x - 2$ एक गुणनखंड है :

(i) $3x^2 + 6x - 24$ (ii) $4x^2 + x - 2$

© NCERT not to be republished

18. दर्शाइए कि $p-1$ बहुपद $p^{10}-1$ का एक गुणनखंड है और साथ ही $p^{11}-1$ का भी एक गुणनखंड है।

19. m के किस मान के लिए, x^3-2mx^2+16 द्विपद $x+2$ से विभाज्य है?

20. यदि $x+2a$ बहुपद $x^5-4a^2x^3+2x+2a+3$ का एक गुणनखंड है, तो a ज्ञात कीजिए।

21. m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $2x-1$ बहुपद $8x^4+4x^3-16x^2+10x+m$ का एक गुणनखंड हो।

22. यदि $x+1$ बहुपद $ax^3+x^2-2x+4a-9$ का एक गुणनखंड है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

23. गुणनखंड कीजिए :

(i) $x^2+9x+18$ (ii) $6x^2+7x-3$

(iii) $2x^2-7x-15$ (iv) $84-2r-2r^2$

24. गुणनखंड कीजिए :

(i) $2x^3-3x^2-17x+30$ (ii) $x^3-6x^2+11x-6$

(iii) x^3+x^2-4x-4 (iv) $3x^3-x^2-3x+1$

25. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करते हुए निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) 103^3 (ii) 101×102 (iii) 999^2

26. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $4x^2+20x+25$

(ii) $9y^2-66yz+121z^2$

(iii) $\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

27. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $9x^2-12x+3$ (ii) $9x^2-12x+4$

28. निम्नलिखित का प्रसार लिखिए :

(i) $(4a-b+2c)^2$

(ii) $(3a-5b-c)^2$

(iii) $(-x+2y-3z)^2$

29. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $9x^2+4y^2+16z^2+12xy-16yz-24xz$

(ii) $25x^2+16y^2+4z^2-40xy+16yz-20xz$

(iii) $16x^2+4y^2+9z^2-16xy-12yz+24\,xz$

30. यदि $a+b+c=9$ और $ab+bc+ca=26$ है, तो $a^2+b^2+c^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

31. निम्नलिखित का प्रसार कीजिए :

(i) $(3a - 2b)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{3}\right)^3$ (iii) $\left(4-\frac{1}{3x}\right)^3$

32. निम्नलिखित के गुणनखंड कीजिए :

(i) $1 - 64a^3 - 12a + 48a^2$

(ii) $8p^3+\frac{12}{5}p^2+\frac{6}{25}p+\frac{1}{125}$

33. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{x}{2}+2y\right)\left(\frac{x^2}{4}-xy+4y^2\right)$ (ii) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

34. गुणनखंड कीजिए :

(i) $1 + 64x^3$ (ii) $a^3-2\sqrt{2}b^3$

35. निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए :

$(2x - y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy + 3yz - 6xz)$

36. गुणनखंड कीजिए :

(i) $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ (ii) $2\sqrt{2}a^3 + 8b^3 - 27c^3 + 18\sqrt{2}abc.$

37. घनों का वास्तविक रूप से परिकलन किए बिना निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (ii) $(0.2)^3 - (0.3)^3 + (0.1)^3$

38. घनों को ज्ञात किए बिना गुणनखंड कीजिए :

$(x - 2y)^3 + (2y - 3z)^3 + (3z - x)^3$

39. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$, जब $x + y = -4$ है।

(ii) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$, जब $x = 2y + 6$ है।

40. उस आयत की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए जिसका क्षेत्रफल $4a^2 + 4a - 3$ है।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि $x + y = 12$ और $xy = 27$ हो, तो $x^3 + y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

हल :

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$
$$= 12[12^2 - 3 \times 27]$$
$$= 12 \times 63 = 756$$

वैकल्पिक हल :

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$
$$= 12^3 - 3 \times 27 \times 12$$
$$= 12[12^2 - 3 \times 27]$$
$$= 12 \times 63 = 756$$

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 2.4

1. यदि बहुपदों $az^3 + 4z^2 + 3z - 4$ और $z^3 - 4z + a$ को $z - 3$ से भाग देने पर, प्रत्येक दशा में समान शेषफल प्राप्त होता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

2. बहुपद $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - ax + 3a - 7$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल 19 प्राप्त होता है। a का मान ज्ञात कीजिए। उस स्थिति में भी शेषफल ज्ञात कीजिए जब इस बहुपद को $x + 2$ से भाग दिया जाता है।

3. यदि $x - 2$ और $x - \frac{1}{2}$ दोनों ही $px^2 + 5x + r$ के गुणनखंड हैं, तो दर्शाइए कि $p = r$ है।

4. बिना वास्तविक विभाजन के सिद्ध कीजिए कि $x^2 - 3x + 2$ से $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 2$ विभाज्य है। [**संकेत:** $x^2 - 3x + 2$ के गुणनखंड कीजिए]

5. $(2x - 5y)^3 - (2x + 5y)^3$ को सरल कीजिए।

6. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + xz - 2yz$ को $(-z + x - 2y)$ से गुणा कीजिए।

7. यदि a, b और c में से प्रत्येक शून्येतर है तथा $a + b + c = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$ है।

8. यदि $a + b + c = 5$ और $ab + bc + ca = 10$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$ है।

9. सिद्ध कीजिए कि $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$ है।